Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Inaugural-Dissertation

welche mit Genehmigung

der

philosophischen Facultät der königlichen Universität Breslau

zur Erlangung der Doctorwürde

Dienstag, den 11. März 1879, Vormittags 11 Uhr

öffentlich verteidigen wird

der Verfasser

Paul Baumert

gegen die Herren

Otto Handel, Dr. phil. und **Paul Jaerisch,** Drd. phil.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Breslau.
Buchdruckerei Lindner.
1879.

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn

Professor Dr. H. Schroeter

in Hochachtung und Dankbarkeit

gewidmet

vom Verfasser.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543119_0069

Jacobi hat in den §§ 43—46 seiner fund. nova Reihen für beliebige, positive oder negative, ganzzahlige Potenzen der drei elliptischen Functionen gegeben. Später hat C. O. Meyer[1]) die Entwickelung des Products

$$\text{sin am } u^{\pm\lambda} \cdot \text{cos am } u^{\pm\mu} \cdot \Delta \text{ am } u^{\pm\nu} \quad [2]) \qquad \text{(I)}$$

und überhaupt rationaler Verbindungen von elliptischen Functionen auf die Jacobi'schen Reihen zurückgeführt. Im Folgenden soll die Entwickelung der im obigen Product enthaltenen Functionen von einem anderen Gesichtspunkte aus vorgenommen werden, der eine Einteilung derselben gestattet und die Form der Reihen in den einzelnen Fällen erkennen lässt, nämlich mit Hilfe einiger auf dem Cauchy'schen Satze beruhenden Eigenschaften doppelt-periodischer Functionen, welche Methode in den *„fonctions elliptiques"* von Briot und Bouquet auf die Potenzen von sin am u angewendet ist. Wir werden dabei zuerst auf Reihen geführt, die ihrer Form nach mit den Jacobi'schen übereinstimmen und nach den sinus und cosinus der Vielfachen des Arguments fortschreiten, dann aber werden sich Partialbruchentwickelungen ergeben, Doppelsummen, die sich endlich in einfache Summen verwandeln lassen. Spezielle Fälle hiervon sind die bekannten drei Reihen für einfache elliptische Functionen. — Wir bedienen uns im Allgemeinen der Bezeichnung Jacobi's; nur soll für die Perioden der elliptischen Functionen die folgende gelten:

$$\omega = 2K = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2 \cdot 1-\varkappa^2 x^2}}$$

$$\omega' = 2iK' = 2i\int_1^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1 \cdot 1-\varkappa^2 x^2}}$$

---

1) Crelle's Journal, 37. p. 273 und 56, p. 314.

2) λ, μ, ν sind beliebige, aber ganze Zahlen.

§ 1.

Die Entwickelung des Products beliebiger ganzzahliger Potenzen von elliptischen Functionen stützt sich auf folgende Sätze über doppelt-periodische Functionen:

„Jede doppelt-periodische Function mit den Perioden ω und ω', welche in einem Punkte ε von der p-ten Ordnung unendlich wird, ist das Integral einer linearen Function von:

$$\sin^2 \operatorname{am}\left(u+\frac{\omega'}{2}-\varepsilon\right).$$

und seinen Ableitungen:

$$\frac{dF(u)}{du} = \varkappa^2 \sum_1^p{}_h \frac{(-1)^h M_h}{(h-1)!} \frac{d^{h-1} \sin^2 \operatorname{am}\left(u+\frac{\omega'}{2}-\varepsilon\right)}{du^{h-1}} \quad (1)$$

„Jede doppelt-periodische Function $2n$-ter Ordnung $F(u)$ mit den Perioden 2ω und ω', welche im Punkte ε unendlich von der p-ten Ordnung wird und die Gleichung erfüllt: $F(u+\omega) = -F(u)$, ist eine lineare Function von

$$\sin \operatorname{am}\left(u+\frac{\omega'}{2}-\varepsilon\right)$$

und seinen Ableitungen:

$$F(u) = \varkappa \sum_1^p{}_h \frac{(-1)^{h-1} M_h}{(h-1)!} \frac{d^{h-1} \sin \operatorname{am}\left(u+\frac{\omega'}{2}-\varepsilon\right)}{du^{h-1}} \quad (2)$$

„Jede doppelt-periodische Function $2n$-ter Ordnung $F(u)$ mit den Perioden 2ω und $\omega+\omega'$, für welche die Gleichungen bestehen $F(u+\omega) = F(u+\omega') = -F(u)$ und der Punkt ε ein Unendlichkeitspunkt p-ter Ordnung ist, ist eine lineare Function von

$$\cos \operatorname{am}\left(u+\frac{\omega'}{2}-\varepsilon\right)$$

und seinen Ableitungen:

$$F(u) = i\varkappa \sum_1^p{}_h \frac{(-1)^{h-1} M_h}{(h-1)!} \frac{d^{h-1} \cos \operatorname{am}\left(u+\frac{\omega'}{2}-\varepsilon\right)}{du^{h-1}} \quad (3)$$

„Jede doppelt-periodische Function $2n$-ter Ordnung $F(u)$ mit den Perioden ω und $2\omega'$, der Eigenschaft: $F(u+\omega') = -F(u)$ und dem p-fachen Unendlichkeitspunkt ε ist eine lineare Function von

$$\Delta \operatorname{am}\left(u+\frac{\omega'}{2}-\varepsilon\right)$$

und seinen Ableitungen:

$$F(u) = i \sum_{1}^{p} {}_{h} \frac{(-1)^{h-1} M_h}{(h-1)!} \frac{d^{h-1} \Delta \mathrm{am}\left(u + \frac{\omega'}{2} - \varepsilon\right)}{du^{h-1}} \qquad (4)$$

Der zweite dieser Sätze rührt von Hermite her,[1]) der erste ist in einer anderen Form ebenfalls von Hermite ausgesprochen worden. Nach ihm lässt sich eine Function mit den Perioden ω und ω' als lineare Function von

$$\frac{d \log \vartheta_1 (u-\varepsilon)}{du}$$

und den Ableitungen dieses Ausdrucks darstellen, wo ε die frühere Bedeutung hat;[2]) ihre erste Ableitung ist also eine lineare Function der Ableitungen von $\log \vartheta_1 (u+\varepsilon)$ von der zweiten ab; da aber

$$\frac{d^2 \log \vartheta_1 (z)}{dz^2} = C - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\left(z + \frac{\omega'}{2}\right)$$

ist,[3]) so ist ersichtlich, dass eine solche Function auch linear zusammengesetzt werden kann aus $\sin^2 \mathrm{am}\left(u + \frac{\omega'}{2} - \varepsilon\right)$, seinem ersten Integral und seinen Ableitungen, was der obige Satz (1) aussagt. Die beiden Sätze (3) und (4) lassen sich leicht in ähnlicher Weise, wie die beiden ersten, mit Hilfe des Cauchy'schen Satzes beweisen.[4]) Für ε sind nur diejenigen Unendlichkeitspunkte zu setzen, welche im Parallelogramm (ω, ω') liegen. Die Coëfficienten M_h in (1) bis (4) erhält man aus der Entwickelung von $F(u)$ in der Umgebung des Punktes ε oder auch von $F(u+\varepsilon)$, welche die Form hat:

$$F(u+\varepsilon) = \frac{M_p}{u^p} + \frac{M_{p-1}}{u^{p-1}} + \cdots \cdots \frac{M_2}{u^2} + \frac{M_1}{u} + \cdots$$

Da die Function $u^p F(u+\varepsilon)$ im Punkte ε keine Unstetigkeit erleidet, so hat man nach dem Maclaurinschen Satze:

$$M_{p-h} = \frac{1}{h!} \left\{ \frac{d^h}{du^h} u^p F(u+\varepsilon) \right\}_0 \qquad (5)$$

Die vorangehenden Sätze sind nun auf die Functionen (I) anwendbar, welche doppelt-periodisch, eindeutig und nur in einzelnen

---

1) Briot et Bouquet, fonctions elliptiques, p. 252.
2) ibid. p. 257.
3) Schellbach, Thetafunctionen, p. 117; auch Briot et B. p. 260.
4) Man sehe den Schluss dieser Arbeit.

Punkten unstetig sind. Wir gehen von dem reciproken Werte von $\sin^{\lambda}\varphi . \cos^{\mu}\varphi . \Delta^{\nu}\varphi$ aus, bezeichnen denselben mit $f(u) = f(\lambda,\mu,\nu)$ und teilen die darin enthaltenen Fälle in vier Gruppen so, dass jede Gruppe die Voraussetzungen eines der obigen vier Sätze erfüllt. Je nachdem nämlich die drei Zahlen λ, μ, ν sämmtlich gerade (ungerade) oder nur zum Teil gerade, zum Teil ungerade sind, wobei es im letzteren Falle noch darauf ankommt, welche der drei Zahlen gerade und welche ungerade sind, hat die zu entwickelnde Function die Perioden ω und ω', 2ω und ω', 2ω und $\omega + \omega'$ oder endlich ω und $2\omega'$. Bezeichnen wir die vier Gruppen mit (a), (b), (c), (d), so giebt die folgende Tabelle die Werte von λ, μ, ν und die Perioden, die zu einer Gruppe gehören, an:

	λ	μ	ν	
(a)	2α	2β	2γ	ω ω'
	$2\alpha+1$	$2\beta+1$	$2\gamma+1$	
(b)	$2\alpha+1$	2β	2γ	2ω, ω'
	2α	$2\beta+1$	$2\gamma+1$	
(c)	2α	$2\beta+1$	2γ	2ω, $\omega+\omega'$
	$2\alpha+1$	2β	$2\gamma+1$	
(d)	2α	2β	$2\gamma+1$	ω, $2\omega'$
	$2\alpha+1$	$2\beta+1$	2γ	

Hierin bedeuten α β γ ganze, positive oder negative Zahlen, die durch die Werte von λ, μ, ν bestimmt sind. Die Function $f(\lambda,\mu,\nu)$ kann in den Punkten 0, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$ und $\frac{\omega'}{2}$ unendlich werden und zwar in den ersten drei Punkten, wenn die Zahlen λ, μ, ν positiv sind; für den Punkt $\frac{\omega}{2}$ wird sowohl $\sin\varphi$, wie $\cos\varphi$ und $\Delta\varphi$ unendlich, die in Rede stehende Function also immer dann, wenn $\rho = -(\lambda+\mu+\nu)$ positiv ist. Die Ordnungen des Unendlichwerdens in den obigen vier Punkten sind somit der Reihe nach λ, μ, ν, ρ.

Wendet man nun den Satz (1) auf die Gruppe (a) an, so hat man für ε der Reihe nach 0, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$ und $\frac{\omega'}{2}$ zu setzen und die entstehenden Ausdrücke zu addiren; versieht man noch $f(\lambda,\mu,\nu)$ für die einzelnen Gruppen mit den Indices 1, 2, 3, 4, so ist nach Anwendung bekannter Formeln:

$$\frac{df_1(\lambda, \mu, \nu)}{du} = \sum_1^{\lambda}{}_h \frac{(-1)^h a_h}{(h-1)!} \frac{d^{h-1}}{du^{h-1}} \frac{1}{\sin^2 \varphi} +$$

$$+ \sum_1^{\mu}{}_h \frac{(-1)^h b_h}{(h-1)!} \frac{d^{h-1}}{du^{h-1}} \frac{\Delta^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \qquad (6)$$

$$+ \varkappa^2 \sum_1^{\nu}{}_h \frac{(-1)^h c_h}{(h-1)!} \frac{d^{h-1}}{du^{h-1}} \frac{\cos^2 \varphi}{\Delta^2 \varphi} +$$

$$+ \varkappa^2 \sum_1^{\rho}{}_h \frac{(-1)^h d_h}{(h-1)!} \frac{d^{h-1}}{du^{h-1}} \sin^2 \varphi$$

Ist eine der Zahlen λ, μ, ν, ρ gleich Null oder negativ, so wird $f_1(u)$ in dem zugehörigen Punkte nicht unendlich und die zugehörige Summe fällt weg. Es können niemals alle Summen gleichzeitig auftreten, denn in Folge der Gleichung

$$\rho = -(\lambda + \mu + \nu) \qquad (7)$$

muss mindestens eine der Zahlen λ, μ, $\nu < 0$ sein, damit $\rho > 0$ sein kann. Nach der Tabelle können nun zwei Fälle eintreten; sind λ, μ, ν sämmtlich gerade, so ist es auch ρ, also $= 2\delta$, im andern Falle ist ρ ungerade $= 2\delta + 1$, also:

1) $\lambda = 2\alpha$, $\mu = 2\beta$, $\nu = 2\gamma$, $\rho = 2\delta$.
2) $\lambda = 2\alpha + 1$, $\mu = 2\beta + 1$, $\nu = 2\gamma + 1$, $\rho = 2\delta + 1$.

Wird dann beachtet, dass $f(2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$ eine gerade Function ist und in der Entwickelung in eine Potenzreihe die Coëfficienten mit ungeradem Index sämmtlich gleich Null sind, so gehen die Gleichungen (7) und (6) in folgende über:

$$\delta = -(\alpha + \beta + \gamma)$$

und

$$\frac{df(2\alpha, 2\beta, 2\gamma)}{du} = \sum_1^{\alpha}{}_h \frac{a_{2h}}{(2h-1)!} \frac{d^{2h-1}}{du^{2h-1}} \frac{1}{\sin^2 \varphi} +$$

$$+ \sum_1^{\beta}{}_h \frac{b_{2h}}{(2h-1)!} \frac{d^{2h-1}}{du^{2h-1}} \frac{\Delta^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \qquad (11)$$

$$+ \varkappa^2 \sum_1^{\gamma}{}_h \frac{c_{2h}}{(2h-1)!} \frac{d^{2h-1}}{du^{2h-1}} \frac{\cos^2 \varphi}{\Delta^2 \varphi} +$$

$$+ \varkappa^2 \sum_1^{\delta}{}_h \frac{d_{2h}}{(2h-1)!} \frac{d^{2h-1}}{du^{2h-1}} \sin^2 \varphi$$

und im zweiten Falle in:

$$\delta = -(\alpha + \beta + \gamma + 2)$$

und

$$-\frac{df(2\alpha+1, 2\beta+1, 2\gamma+1)}{du} = \sum_0^{\alpha}{}_h \frac{a_{2h+1}}{(2h)!}\frac{d^{2h}}{du^{2h}}\frac{1}{\sin^2\varphi} + \sum_0^{\beta}{}_h \frac{b_{2h+1}}{(2h)!}\frac{d^{2h}}{du^{2h}}\frac{\Delta^2\varphi}{\cos^2\varphi} + \varkappa^2\sum_0^{\gamma}{}_h \frac{c_{2h+1}}{(2h)}\frac{d^{2h}}{du^{2h}}\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2\varphi} + \varkappa^2\sum_0^{\delta}{}_h \frac{d_{2h+1}}{(2h)!}\frac{d^{2h}}{du^{2h}}\sin^2\varphi, \qquad \text{(III)}$$

denn da $f(2\alpha + 1, 2\beta + 1, 2\gamma + 1)$ immer eine ungerade Function sein muss wegen der darin vorkommenden ungeraden Potenz von $\sin\varphi$, so müssen die Coëfficienten mit geradem Index sämmtlich gleich Null sein. Die Functionen $u^\lambda f(u)$, $\left(u - \frac{\omega}{2}\right)^\mu f(u)$, $\left(u - \frac{\omega+\omega'}{2}\right)^\nu f(u)$ und $\left(u - \frac{\omega'}{2}\right)^\rho f(u)$ erleiden in den Umgebungen der Punkte 0, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega + \omega'}{2}$ und $\frac{\omega'}{2}$ keine Unstetigkeiten mehr, sie können daher nach dem Taylor'schen Satze oder die Functionen $u^\lambda f(u)$, $u^\mu f\left(u + \frac{\omega}{2}\right)$, $u^\nu f\left(u + \frac{\omega+\omega'}{2}\right)$ und $u^\rho f\left(u + \frac{\omega'}{2}\right)$ nach dem Maclaurin'schen Satze nach Potenzen von u entwickelt werden; die Coëfficienten dieser Reihen und somit die Coëfficienten in unsern Formeln sind also gegeben durch:

$$\begin{aligned}
(2p)!\quad a_{\lambda+2p} &= \left\{\frac{d^{2p}}{du^{2p}}\,\frac{u^\lambda}{\sin^\lambda\varphi\,\cos^\mu\varphi\,\Delta^\nu\varphi}\right\}_0,\\
(2p)!\quad b_{\mu-2p} &= (-1)^\mu\left\{\frac{d^{2p}}{du^{2p}}\,\frac{u^\mu\,\Delta\varphi^{\lambda+\mu+\nu}}{\sin^\mu\varphi\,\cos^\lambda\varphi}\right\}_0\frac{1}{\varkappa'^{\mu+\nu}}, \qquad (8)\\
(2p)!\quad c_{\nu-2p} &= \left\{\frac{d^{2p}}{du^{2p}}\,\frac{u^\nu\,\cos\varphi^{\lambda+\mu+\nu}}{\sin^\nu\varphi\,\Delta^\lambda\varphi}\right\}_0\frac{i^{\mu-\nu}\,\varkappa^{\lambda+\mu}}{\varkappa'^{\mu+\nu}},\\
(2p)!\quad d_{\rho-2p} &= \left\{\frac{d^{2p}}{du^{2p}}\,\frac{u^\rho}{\sin^\rho\varphi\,\cos^\nu\varphi\,\Delta^\mu\varphi}\right\}_0 i^{\mu+\nu}\,\varkappa^{\lambda+\mu},
\end{aligned}$$

wo p der Reihe nach durch 1 2 3 . . . zu ersetzen ist. Auch aus dieser Bildungsweise der Coëfficienten läst sich erkennen, dass im

ersten Falle alle geraden, im zweiten alle ungeraden von Null verschieden sind. Denn da $\sin\varphi$, also auch sein reciproker Wert, eine ungerade Function ist, so ist $\frac{u}{\sin\varphi}$ eine gerade, also auch jede Potenz von $\frac{u}{\sin\varphi}$; ebenso sind alle Potenzen von $\cos\varphi$ und $\Delta\varphi$ gerade Functionen, folglich überhaupt die Functionen, welche zur Auffindung der Coëfficienten zu differenziren sind; ihre ungeraden Ableitungen müssen daher für $u = 0$ verschwinden, d. h. alle Coëfficienten, bei welchen man in (8) $2p+1$ an Stelle von $2p$ zu setzen hätte. Daraus ist ersichtlich, dass auch in den Entwickelungen der übrigen Gruppen immer nur sämmtliche Coëfficienten mit geraden oder mit ungeraden Indices vorkommen können. Versteht man unter Ah, Bh, Ch, Dh nur die in den Klammern von (8) stehenden Ausdrücke durch $(2p)!$ dividirt, setzt man also:

$$a_{\lambda-2\rho} = A_{\lambda-2\rho}\,, \qquad c_{\nu-2\rho} = \frac{i^{\mu-\nu}\varkappa^{\lambda+\mu}}{\varkappa'^{\mu+\nu}}\,C_{\nu-2\rho}\,,$$
$$b_{\mu-2\rho} = \frac{(-1)^{\mu}}{\varkappa'^{\mu+\nu}}\,B_{\mu-2\rho}\,, \qquad d_{\rho-2\rho} = i^{\mu+\nu}\varkappa^{\lambda+\mu}\,D_{\rho-2\rho}\,, \tag{9}$$

so nehmen (II) und (III) die Gestalt an:

$$\begin{aligned}\frac{df(2\alpha,\,2\beta,\,2\gamma)}{du} = {} & \sum_{1}^{\alpha}{}_{h}\frac{A_{2h}}{(2h-1)!}\,\frac{d^{2h-1}}{du^{2h-1}}\,\frac{1}{\sin^2\varphi} + \\ & + \frac{1}{\varkappa'^{2\beta+2\gamma}}\sum_{1}^{\beta}{}_{h}\frac{B_{2h}}{(2h-1)!}\,\frac{d^{2h-1}}{du^{2h-1}}\,\frac{\Delta^2\varphi}{\cos^2\varphi} \\ & + (-1)^{\beta-\gamma}\,\frac{\varkappa^{2\alpha+2\beta+2}}{\varkappa'^{2\beta+2\gamma}}\sum_{1}^{\gamma}{}_{h}\frac{C_{2h}}{(2h-1)!}\,\frac{d^{2h-1}}{du^{2h-1}}\,\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2\varphi} \\ & + (-1)^{\beta+\gamma}\,\varkappa^{2\alpha+2\beta+2}\sum_{1}^{\delta}{}_{h}\frac{D_{2h}}{(2h-1)!}\,\frac{d^{2h-1}}{du^{2h-1}}\,\sin^2\varphi,\end{aligned} \tag{IV}$$

$$\begin{aligned}-\frac{df(2\alpha+1,\,2\beta+1,\,2\gamma+1)}{du} = {} & \sum_{0}^{\alpha}{}_{h}\frac{A_{2h+1}}{(2h)!}\,\frac{d^{2h}}{du^{2h}}\,\frac{1}{\sin^2\varphi} - \\ & - \frac{1}{\varkappa'^{2\beta+2\gamma+2}}\sum_{0}^{\beta}{}_{h}\frac{B_{2h+1}}{(2h)!}\,\frac{d^{2h}}{du^{2h}}\,\frac{\Delta^2\varphi}{\cos^2\varphi} \\ & + (-1)^{\beta-\gamma}\,\frac{\varkappa^{2\alpha+2\beta+4}}{\varkappa'^{2\beta+2\gamma+2}}\sum_{0}^{\gamma}{}_{h}\frac{C_{2h+1}}{(2h)!}\,\frac{d^{2h}}{du^{2h}}\,\frac{\cos^2\varphi}{\Delta^2\varphi} \\ & + (-1)^{\beta+\gamma}\,\varkappa^{2\alpha+2\beta+4}\sum_{0}^{\delta}{}_{h}\frac{D_{2h+1}}{(2h)!}\,\frac{d^{2h}}{du^{2h}}\,\sin^2\varphi.\end{aligned} \tag{V}$$

Was die Form der Reihen anbelangt, so sieht man, da die Quadrate der einfachen elliptischen Functionen nach cosinus der geraden Vielfachen von $x \left(u = \frac{\omega x}{\pi} \right)$ fortschreiten und in (IV) die ungeraden, nach der Integration also die geraden Differentialquotienten vorkommen, dass im Fall der geraden λ, μ, ν die Reihe nach cosinus fortschreitet und die Coëfficienten von der Form sind:

$$\frac{Q}{1-q^{2m}} \left\{ a_1(2m) + a_3(2m)^3 + a_5(2m)^5 + \ldots . a_{2p-1}(2m)^{2p-1} \right\},$$

worin m Summationsbuchstabe ist, so dass das allgemeine Glied die Gestalt hat:

$$\frac{Q}{1-q^{2m}} \cos 2mx \left\{ a_1(2m) + a_3(2m)^3 + \ldots . a_{2p-1}(2m)^{2p-1} \right\},$$

wenn p die grösste der Zahlen α, β, γ, δ ist. Im zweiten Falle, wenn die Zahlen λ, μ, ν sämmtlich ungerade sind, kommen nur die geraden, nach der Integration also nur die ungeraden Ableitungen vor; das allgemeine Glied der Reihe ist daher:

$$\frac{Q}{1-q^{2m}} \sin 2mx \left\{ b_0 + b_2(2m)^2 + b_4(2m)^4 + \ldots . b_{2p}(2m)^{2p} \right\},$$

Die beiden für die erste Gruppe sich ergebenden Formen sind somit:

$$f(2\alpha, 2\beta, 2\gamma) = a + \sum_1^\infty{}^m \cos 2mx \frac{Q}{1-q^{2m}} \times \left\{ a_1(2m) + a_3(2m)^3 + \ldots . \right\}, \tag{10}$$

$$f(2\alpha+1, 2\beta+1, 2\gamma+1) = b + \sum_1^\infty{}^m \sin 2mx \frac{Q}{1-q^{2m}} \times \left\{ b_0 + b_2(2m)^2 + b_4(2m)^4 + \ldots \right\}. \tag{11}$$

Q bedeutet darin entweder q^m oder q^{2m} oder diese beiden Grössen mit $(-1)^m$ multiplicirt.

Um die Coëfficienten A_k, B_k . . wirklich zu berechnen, wäre es nach (8) nötig, Brüche zu differenziren, deren Nenner im Allgemeinen aus mehreren Factoren besteht; zunächst ist es von Vorteil, die bekannten Potenzreihen für $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ und $\Delta\varphi$ zu benutzen; um aber die Differentiation von Brüchen zu vermeiden, stellen wir auch die Potenzreihen für die reciproken Werte jener Functionen auf.

Bezeichnet man

$$\cos\varphi \qquad \Delta\varphi \qquad \frac{u}{\sin\varphi} \qquad \frac{1}{\cos\varphi} \qquad \frac{1}{\Delta\varphi}$$

kurz mit

$$c \qquad \Delta \qquad z \qquad v \qquad w,$$

so ist:

$$\frac{u}{\sin\varphi} = z = 1 + \frac{1}{3}(1 + \varkappa^2)\frac{u^2}{2!} + \frac{1}{3.5}(7 - 22\varkappa^2 + 7\varkappa^4)\frac{u^4}{4!} + \frac{1}{3.7}(31 - 15\varkappa^2 - 15\varkappa^4 + 31\varkappa^6)\frac{u^6}{6!} + \cdots,$$

$$\frac{1}{\cos\varphi} = v = 1 + \frac{u^2}{2!} + (5 - 4\varkappa^2)\frac{u^4}{4!} + (61 - 76\varkappa^2 + 16\varkappa^4)\frac{u^6}{6!} + \cdots,$$

$$\frac{1}{\Delta\varphi} = w = 1 + \varkappa^2\frac{u^2}{2!} + \varkappa^2(5\varkappa^2 - 4)\frac{u^4}{4!} + \varkappa^2(61\varkappa^4 - 76\varkappa^2 + 16)\frac{u^6}{6!} + \cdots$$

Bisweilen sind auch folgende beiden Reihen von Nutzen:

$$\frac{u \cdot \Delta\varphi}{\sin\varphi} = z\Delta = 1 + \frac{1}{3}(1 - 2\varkappa^2)\frac{u^2}{2!} + \frac{1}{3.5}(7 + 8\varkappa^2 - 8\varkappa^4)\frac{u^4}{4!} + \cdots,$$

$$\frac{u \cdot \cos\varphi}{\sin\varphi} = zc = 1 + \frac{1}{3}(\varkappa^2 - 2)\frac{u^2}{2!} + \frac{1}{3.5}(7\varkappa^4 + 8\varkappa^2 - 8)\frac{u^4}{4!} + \cdots$$

Durch Anwendung derselben ist die Bildung der Coëfficienten wesentlich erleichtert, da nur noch Ableitungen von Producten zu bilden sind von der Form $a^x b^y c^z$; denn aus (8) und (9) folgt:

$$(2p)!\, A_{\lambda-2p} = \left\{ \frac{d^{2p}}{du^{2p}} \frac{z^\lambda}{c^\mu \Delta^\nu} \right\}_0 = \left\{ \frac{d^{2p}}{du^{2p}} z^\lambda v^\mu w^\nu \right\}_0, \qquad (12)$$

$$(2p)!\, B_{\mu-2p} = \left\{ \frac{d^{2p}}{du^{2p}} \frac{z^\mu \Delta^{\lambda+\mu+\nu}}{c^\lambda} \right\}_0 = \left\{ \frac{d^{2p}}{du^{2p}} z^\mu v^\lambda w^{\lambda+\mu+\nu} \right\}_0,$$

$$(2p)!\, C_{\nu-2p} = \left\{ \frac{d^{2p}}{du^{2p}} \frac{z^\mu c^{\lambda+\mu+\nu}}{\Delta^\lambda} \right\}_0 = \left\{ \frac{d^{2p}}{du^{2p}} z^\nu w^\lambda c^{\lambda+\mu+\nu} \right\}_0,$$

$$(2p)!\, D_{\rho-2p} = \left\{ \frac{d^{2p}}{du^{2p}} \frac{z^\rho}{c^\nu \Delta^\mu} \right\}_0 = \left\{ \frac{d^{2p}}{du^{2p}} z^\rho v^\nu w^\mu \right\}_0.$$

Indem man $\alpha = n$, $\beta = \gamma = o$ setzt, erhält man aus (IV):

$$\frac{1}{\sin^{2n}\varphi} = M + \sum_1^n{}_h \frac{A_{2h}}{(2h-1)!} \frac{d^{2h-2}}{du^{2h-2}} \frac{1}{\sin^2\varphi}$$ [1]

[1] Jacobi, Fund. pag. 117 und 118.

und für $\alpha = -n$, $\beta = \gamma = 0$:

$$\sin^{2n}\varphi = N + \sum_1^n{}^k \frac{D_{2k}}{(2k-1)!} \frac{d^{2k-2}}{du^{2k-2}} \sin^2\varphi \cdot \frac{1}{\varkappa^{2n-2}} \quad [1] \qquad (13)$$

Aus (12) erkennt man, dass die A_{2k} mit den D_{2k} übereinstimmen, woraus dann folgt, dass auch N von M nicht verschieden ist bis auf Potenzen von $\varkappa$ oder $\varkappa'$. Solche Beziehungen zwischen den Coëfficienten und den in den Entwickelungen vorkommenden Integrationsconstanten lassen sich aus (12) auch für viele andre specielle Fälle ableiten. Ist $n = 3$ in (13), so findet man:

$$A_6 = 1,$$
$$A_4 = 1 + \varkappa^2,$$
$$A_2 = \frac{1}{3.5}(8 + 7\varkappa^2 + 8\varkappa^4),$$
$$M = -\frac{4}{3.5}\varkappa^2(1 + \varkappa^2),$$

so dass man die von Jacobi [2]) angegebene Entwickelung für $\sin^6\varphi$ erhält. Setzt man ebenso in (V) $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -1$, so ergeben sich die Coëfficienten:

$$A_5 = 1, \qquad A_1 = 0,$$
$$A_3 = \frac{1}{3}(1 + \varkappa^2), \qquad M = 0,$$

wenn M wieder die Integrationsconstante ist. Daraus folgt:

$$-4\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^5 \frac{\cos\varphi\,\Delta\varphi}{\sin^5\varphi} = 4(1 + \varkappa^2)\frac{d}{dx}\frac{1}{\sin^2 x}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 + \frac{d^3}{dx^3}\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$+ 4\sum_1^\infty{}^m \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}} \sin 2mx \left\{4(1 + \varkappa^2)\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2 (2m)^2 - (2m)^4\right\},$$

eine Entwickelung, zu der man auch gelangt durch Differentiation der (−4)ten Potenz von $\sin\varphi$. [3])

Die der zweiten Gruppe angehörigen Functionen, in welchen $\sin\varphi$ in einer ungeraden, $\cos\varphi$ und $\Delta\varphi$ in einer geraden Potenz oder umgekehrt vorkommen, haben die Perioden 2ω und ω' und nehmen bei Vermehrung des Arguments um ω den entgegengesetzten Wert an, können daher mit Hilfe des Satzes (2) entwickelt werden. Setzt

[1]) Jacobi, Fund. p. 117 und 118.
[2]) Jacobi, Fund. p. 122.
[3]) ibid. p. 122.

man wieder der Reihe nach für ε die Werte 0, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega + \omega'}{2}$, $\frac{\omega'}{2}$ und bestimmt die Coëfficienten durch die Gleichungen (12), so ist:

$$f_2(\lambda, \mu, \nu) = \sum_1^{\lambda}{}_h \frac{(-1)^{h-1} A_h}{(h-1)!} \frac{d^{h-1}}{du^{h-1}} \frac{1}{\sin\varphi} +$$

$$+ \frac{(-1)^{\mu+1}}{\varkappa'^{\mu+\nu}} \sum_1^{\mu}{}_h \frac{(-1)^{h-1} B_h}{(h-1)!} \frac{d^{h-1}}{du^{h-1}} \frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi} \qquad (15)$$

$$- \frac{i^{\mu+\nu} \varkappa^{\lambda+\mu+1}}{\varkappa'^{\mu+\nu}} \sum_1^{\nu}{}_h \frac{(-1)^{h-1} C_h}{(h-1)!} \frac{d^{h-1}}{du^{h-1}} \frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$+ i^{\mu+\nu} \varkappa^{\lambda+\mu+1} \sum_1^{\rho}{}_h \frac{(-1)^{h-1} D_h}{(h-1)!} \frac{d^{h-1}}{du^{h-1}} \sin\varphi.$$

Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

1) $\lambda = 2\alpha+1, \quad \mu = 2\beta, \quad \nu = 2\gamma, \quad \rho = 2\delta+1,$

2) $\lambda = 2\alpha, \quad \mu = 2\beta+1, \quad \nu = 2\gamma+1, \quad \rho = 2\delta.$

In beiden Fällen geht (7) über in:

$$\delta = -(\alpha + \beta + \gamma + 1) \qquad (16)$$

und da im ersten Fallle die A_h und D_h mit geradem und die B_h und C_h mit ungeradem Index verschwinden, im zweiten aber die A_h und D_h mit ungeradem und die B_h und C_h mit geradem, so folgen aus (15) die beiden Reihen:

$$f(2\alpha+1, 2\beta, 2\gamma) = \sum_0^{\alpha}{}_h \frac{A_{2h+1}}{(2h)!} \frac{d^{2h}}{du^{2h}} \frac{1}{\sin\varphi}$$

$$+ \frac{1}{\varkappa'^{2\beta+2\gamma}} \sum_1^{\beta}{}_h \frac{B_{2h}}{(2h-1)!} \frac{d^{2h-1}}{du^{2h-1}} \frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi} \qquad (VI)$$

$$+ (-1)^{\beta-\gamma} \frac{\varkappa^{2\alpha+2\beta+2}}{\varkappa'^{2\beta+2\gamma}} \sum_1^{\gamma}{}_h \frac{C_{2h}}{(2h-1)!} \frac{d^{2h-1}}{du^{2h-1}} \frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$+ (-1)^{\beta+\gamma} \varkappa^{2\alpha+2\beta+2} \sum_0^{\delta}{}_h \frac{D_{2h+1}}{(2h)!} \frac{d^{2h}}{du^{2h}} \sin\varphi,$$

$$f(2\alpha,\ 2\beta+1,\ 2\gamma+1) = -\sum_1^{\alpha}{}_h \frac{A_{2h}}{(2h-1)!}\frac{d^{2h-1}}{du^{2h-1}}\frac{1}{\sin\varphi}$$

$$+\frac{1}{\varkappa'^{2\beta+2\gamma+2}}\sum_0^{\beta}{}_h \frac{B_{2h+1}}{(2h)!}\frac{d^{2h}}{du^{2h}}\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi} \qquad \text{(VII)}$$

$$+\frac{(-1)^{\beta-\gamma-1}\varkappa^{2\alpha+2\beta+2}}{\varkappa'^{2\beta+2\gamma+2}}\sum_0^{\gamma}{}_h \frac{C_{2h+1}}{(2h)!}\frac{d^{2h}}{du^{2h}}\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$+(-1)^{\beta+\gamma}\varkappa^{2\alpha+2\beta+2}\sum_1^{\delta}{}_h \frac{D_{2h}}{(2h-1)!}\frac{d^{2h-1}}{du^{2h-1}}\sin\varphi.$$

Aus den Reihen für die in diesen Summen vorkommenden einfachen elliptischen Functionen erkennt man, dass die Formen der obigen Entwickelungen folgende sind:

$$f(2\alpha+1,\ 2\beta,\ 2\gamma) = c + \sum_1^{\infty}{}_m \sin(2m-1)x\,\frac{Q}{1-q^{2m-1}} \qquad (17)$$
$$\times\left\{c_0 + c_1(2m-1) + \ldots\right\},$$

$$f(2\alpha,\ 2\beta+1,\ 2\gamma+1) = d + \sum_1^{\infty}{}_m \cos(2m-1)x\,\frac{Q}{1-q^{2m-1}} \qquad (18)$$
$$\times\left\{d_0 + d_1(2m-1) + \ldots\right\}.$$

Q ist darin $q^{m-1/2}$ oder q^{2m-1} oder diese beiden Grössen mit dem Factor $(-1)^m$ versehen. Die vor den Summen stehenden Ausdrücke c und d brauchen ebenso wie a und b in der ersten Gruppe nicht Constanten zu sein, sondern können trigonometrische Functionen von x enthalten. Die Coëfficienten c_i und d_i sind Functionen von $\varkappa^2$ und $\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$. Für $\alpha = n$, $\beta = \gamma = 0$ entsteht aus (VI):

$$\frac{1}{\sin^{2n+1}\varphi} = \sum_0^{n}{}_h \frac{A_{2h+1}}{(2h)!}\frac{d^{2h}}{du^{2h}}\frac{1}{\sin\varphi}$$ [1]

[1] Jacobi, Fund. p. 118.

Ist $n = 2$, so sind die Coëfficienten:

$$A_5 = 1,$$
$$A_3 = \frac{5}{3!}(1 + \varkappa^2),$$
$$A_1 = \frac{3}{4!}(3 + 2\varkappa^2 + 3\varkappa^4).\ ^{1})$$

Wendet man auf die beiden übrigen Gruppen ähnliche Betrachtungen an, so gelangt man zu folgenden Resultaten. In der Gruppe (c) unterscheidet man die beiden Fälle:

1) $\lambda = 2\alpha, \quad \mu = 2\beta+1, \quad \nu = 2\gamma, \quad \rho = 2\delta+1,$
2) $\lambda = 2\alpha+1, \quad \mu = 2\beta, \quad \nu = 2\gamma+1, \quad \rho = 2\delta,$

für welche (7) übergeht in:

$$\delta = -(\alpha + \beta + \gamma + 1).$$

Mit Benutzung des dritten Satzes über doppelt-periodische Functionen erhält man:

$$\begin{aligned} f_3(\lambda, \mu, \nu) &= \sum_1^{\lambda}{}_h \frac{(-1)^{h-1} A_h}{(h-1)!} \frac{d^{h-1}}{du^{h-1}} \frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi} \\ &+ \frac{(-1)^{\mu+1}}{\varkappa'^{\mu+\nu-1}} \sum_1^{\mu}{}_h \frac{(-1)^{h-1} B_h}{(h-1)!} \frac{d^{h-1}}{du^{h-1}} \frac{1}{\cos\varphi} \\ &+ \frac{i^{\mu-\nu+1} \varkappa^{\lambda+\mu+1}}{\varkappa'^{\mu+\nu-1}} \sum_1^{\nu}{}_h \frac{(-1)^{h-1} C_h}{(h-1)!} \frac{d^{h-1}}{du^{h-1}} \frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi} \\ &+ i^{\mu+\nu+1} \varkappa^{\lambda+\mu+1} \sum_1^{\rho}{}_h \frac{(-1)^{h-1} D_h}{(h-1)!} \frac{d^{h-1}}{du^{h-1}} \cos\varphi, \end{aligned} \tag{19}$$

wo die Coëfficienten wieder aus (12) zu bestimmen sind. Für den ersten Fall nimmt (19) die Gestalt an:

$$\begin{aligned} f(2\alpha, 2\beta+1, 2\gamma) &= \sum_1^{\alpha}{}_h \frac{A_{2h}}{(2h-1)!} \frac{d^{2h-1}}{du^{2h-1}} \frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi} \\ &+ \frac{1}{\varkappa'^{2\beta+2\gamma}} \sum_0^{\beta}{}_h \frac{B_{2h+1}}{(2h)!} \frac{d^{2h}}{du^{2h}} \frac{1}{\cos\varphi} \\ &+ \frac{(-1)^{\beta-\gamma} \varkappa^{2\alpha+2\beta+2}}{\varkappa'^{2\beta+2\gamma}} \sum_1^{\gamma}{}_h \frac{C_{2h}}{(2h-1)!} \frac{d^{2h-1}}{du^{2h-1}} \frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi} \\ &+ (-1)^{\beta+\gamma+1} \varkappa^{2\alpha+2\beta+2} \sum_0^{\delta}{}_h \frac{D_{2h+1}}{(2h)!} \frac{d^{2h}}{du^{2h}} \cos\varphi, \end{aligned} \tag{VIII}$$

1) Jacobi, Fund. p. 119.

für den zweiten:

$$f(2\alpha+1,\ 2\beta,\ 2\gamma+1) = \sum_0^{\alpha}{}_h \frac{A_{2h+1}}{(2h)!}\frac{d^{2h}}{du^{2h}}\frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi}$$

$$+ \frac{1}{\varkappa'^{2\beta+2\gamma}} \sum_1^{\beta}{}_h \frac{B_{2h}}{(2h-1)!}\frac{d^{2h-1}}{du^{2h-1}}\frac{1}{\cos\varphi} \qquad \text{(IX)}$$

$$+ \frac{(-1)^{\beta+\gamma}\varkappa^{2\alpha+2\beta+2}}{\varkappa'^{2\beta+2\gamma}} \sum_0^{\gamma}{}_h \frac{C_{2h+1}}{(2h)!}\frac{d^{2h}}{du^{2h}}\frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$+ (-1)^{\beta+\gamma}\varkappa^{2\alpha+2\beta+2} \sum_1^{\delta}{}_h \frac{D_{2h}}{(2h-1)!}\frac{d^{2h-1}}{du^{2h-1}}\cos\varphi.$$

Da $\frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi}$ und $\frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi}$ nach den sinus, $\cos\varphi$ und sein reciproker Wert nach den cosinus der ungeraden Vielfachen von x fortschreiten, so ergeben sich die beiden Formen:

$$f(2\alpha,\ 2\beta+1,\ 2\gamma) = e + \sum_1^{\infty}{}_m \cos(2m-1)x \frac{Q}{1+q^{2m-1}} \qquad (20)$$

$$\times \left\{ e_0 + e_1(2m-1) + e_2(2m-1)^2 + \ldots \right\},$$

$$f(2\alpha+1,\ 2\beta,\ 2\gamma+1) = f + \sum_1^{\infty}{}_m \sin(2m-1)x \frac{Q}{1+q^{2m-1}} \qquad (21)$$

$$\times \left\{ f_0 + f_1(2m-1) + f_2(2m-1)^2 + \ldots \right\}.$$

Für Q gilt dasselbe, was für die Gruppe (b) gesagt war. Die Coëfficienten e_i und f_i sind wieder Functionen von $\varkappa^2$ und $\binom{\omega}{\pi}$ und e und f ohne Index sind aus den e_i bez. f_i und trigonometrischen Functionen von x zusammengesetzt.

Die letzte Gruppe enthält die Functionen der Form (I), welche die Perioden ω und $2\omega'$ haben und bei Veränderung des Arguments um ω' den entgegengesetzten Wert annehmen. Aus Satz (4) über doppelt-periodische Functionen folgt:

$$
\begin{aligned}
f_4(\lambda,\ \mu,\ \nu) = & \sum_1^{\lambda}{}_h \frac{(-1)^{h-1}A_h}{(h-1)!}\,\frac{d^{h-1}}{du^{h-1}}\ \mathrm{cotg}\varphi \\
& + \frac{(-1)^{\mu+1}}{\varkappa'^{\mu+\nu-1}} \sum_1^{\mu}{}_h \frac{(-1)^{h-1}B_h}{(h-1)!}\,\frac{d^{h-1}}{du^{h-1}}\ \mathrm{tg}\,\varphi \\
& + \frac{i^{\mu-\nu+1}\varkappa^{\lambda+\mu}}{\varkappa'^{\mu+\nu-1}} \sum_1^{\nu}{}_h \frac{(-1)^{h-1}C_h}{(h-1)!}\,\frac{d^{h-1}}{du^{h-1}}\,\frac{1}{\Delta\varphi} \\
& + i^{\mu+\nu+1}\varkappa^{\lambda+\mu} \sum_1^{\rho}{}_h \frac{(-1)^{h-1}D_h}{(h-1)!}\,\frac{d^{h-1}}{du^{h-1}}\,\Delta\varphi.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Setzt man hierin:

1) $\lambda = 2\alpha\ ,\quad \mu = 2\beta,\quad \nu = 2\gamma+1,\quad \rho = 2\delta+1,$
2) $\lambda = 2\alpha+1,\quad \mu = 2\beta+1,\quad \nu = 2\gamma,\quad \rho = 2\delta,$

so geht (22) über in:

$$
\begin{aligned}
f(2\alpha,\ 2\beta,\ 2\gamma+1) = & -\sum_1^{\alpha}{}_h \frac{A_{2h}}{(2h-1)!}\,\frac{d^{2h-1}}{du^{2h-1}}\ \mathrm{cotg}\varphi \\
& + \frac{1}{\varkappa'^{2\beta+2\gamma}} \sum_1^{\beta}{}_h \frac{B_{2h}}{(2h-1)!}\,\frac{d^{2h-1}}{du^{2h-1}}\ \mathrm{tang}\varphi \\
& + \frac{(-1)^{\beta-\gamma}\varkappa^{\alpha+2\beta}}{\varkappa'^{2\beta+2\gamma}} \sum_0^{\gamma}{}_h \frac{C_{2h+1}}{(2h)!}\,\frac{d^{2h}}{du^{2h}}\,\frac{1}{\Delta\varphi} \\
& + (-1)^{\beta+\gamma+1}\varkappa^{2\alpha+2\beta} \sum_0^{\delta}{}_h \frac{D_{2h+1}}{(2h)!}\,\frac{d^{2h}}{du^{2h}}\,\Delta\varphi
\end{aligned}
\tag{X}
$$

und

$$
\begin{aligned}
f(2\alpha+1,\ 2\beta+1,\ 2\gamma) = & \sum_0^{\alpha}{}_h \frac{A_{2h+1}}{(2h)!}\,\frac{d^{2h}}{du^{2h}}\ \mathrm{cotg}\,\varphi \\
& + \frac{1}{\varkappa'^{2\beta+2\gamma}} \sum_0^{\beta}{}_h \frac{B_{2h+1}}{(2h)!}\,\frac{d^{2h}}{du^{2h}}\ \mathrm{tang}\,\varphi \\
& + \frac{(-1)^{\beta-\gamma}\varkappa^{2\alpha+2\beta+2}}{\varkappa'^{2\beta+2\gamma}} \sum_1^{\gamma}{}_h \frac{C_{2h}}{(2h-1)!}\,\frac{d^{2h-1}}{du^{2h-1}}\,\frac{1}{\Delta\varphi} \\
& + (-1)^{\beta+\gamma}\varkappa^{2\alpha+2\beta+2} \sum_1^{\delta}{}_h \frac{D_{2h}}{(2h-1)!}\,\frac{d^{2h-1}}{du^{2h-1}}\,\Delta\varphi.
\end{aligned}
\tag{XI}
$$

Hier besteht wieder in beiden Fällen die Gleichung (16). Aus den Reihen für $\mathrm{tg}\varphi$, $\mathrm{cotg}\varphi$, $\Delta\varphi$ und seinen reciproken Wert sieht man, dass (X) und (XI) die Formen haben:

$$f(2\alpha,\ 2\beta,\ 2\gamma+1) = g + \sum_1^\infty{}^m \cos 2mx \frac{Q}{1+q^{2m}} \asymp \left\{ g_0 + g_1(2m) + g_2(2m)^2 + \ldots \right\}, \tag{23}$$

$$f(2\alpha+1,\ 2\beta+1,\ 2\gamma) = h + \sum_1^\infty{}^m \sin 2mx \frac{Q}{1+q^{2m}} \asymp \left\{ h_0 + h_1(2m) + h_2(2m)^2 + \ldots \right\}. \tag{24}$$

Für Q gilt hier dasselbe, was für das Q der ersten Gruppe gesagt ist und die Buchstaben g, h, g_i, h_i haben ähnliche Bedeutungen, wie die a_i b_i . . . .

Nach dem vorhergehenden lässt sich der von C. O. Meyer[1]) angegebene Satz aussprechen, dass das Product

$$\sin \mathrm{am}^{\pm\lambda} u \cos \mathrm{am}^{\pm\mu} u \, \Delta \mathrm{am}^{\pm\nu} u$$

durch eine Summe von ersten und zweiten Potenzen von einfachen elliptischen Functionen, ihrem ersten Integral und ihren Differentialquotienten nach u ausgedrückt werden kann. Dieser Satz gilt auch für jede andre eindeutige, im Allgemeinen endliche und stetige doppeltperiodische Function, deren Perioden ω und ω', 2ω und ω', 2ω und $\omega + \omega'$ oder ω und $2\omega'$ sind, wofern sie keine andern Unendlichkeitspunkte hat, als die Puncte $u = 0$, $u = \frac{\omega}{2}$, $u = \frac{\omega + \omega'}{2}$, $u = \frac{\omega'}{2}$. Die im Eingange dieses § angeführten Sätze über doppelt-periodische Functionen sind auch dann noch anwendbar, wenn andre Unstetigkeitspunkte vorkommen, wenn nur das Elementarparallelogramm der Perioden eines der genannten ist. Die vorangehenden Entwickelungen können von Wichtigkeit für die Integration zusammengesetzter elliptischer Functionen sein, also für Integrale von der Form:

$$\int \sin \mathrm{am}^{\pm\lambda} u \cos \mathrm{am}^{\pm\mu} u \, \Delta \mathrm{am}^{\pm\nu} u \, du.$$

Da nämlich die rechten Seiten der Entwickelungen höchstens das erste Integral der einfachen elliptischen Functionen oder ihrer Quadrate,

[1]) Crelle, 37 p. 281.

ausserdem aber diese Functionen selbst und ihre Differentialquotienten enthalten, so ist die Berechnung des obigen Integrals zurückgeführt auf höchstens die ersten beiden Integrale der einfachen elliptischen Functionen oder ihrer Quadrate, diese selbst und ihre Differentialquotienten. Besonders einfach würde sich die Integration gestalten, wenn man die unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrücke in Form der obigen Reihen nach sinus oder cosinus der Vielfachen des Arguments annimmt, oder auch, wenn man in den Formeln (IV) — (XI) für die einfachen elliptischen Functionen die Potenzreihen einführt.

§ 2.

Wir gehen zur Entwickelung unsrer Function (I) in Doppelsummen über. Ist $F(u)$ eine eindeutige Function und endlich und stetig in einem Flächenstücke mit der Begrenzung C, einzelne Punkte ausgenommen, so ergiebt sich aus dem Cauchy'schen Satze, dass

$$F(u) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(t)\,.\,dt}{t-u} - R,$$

wo das Integral über die obige Begrenzung C auszudehnen ist und R die Summe der Residuen in Bezug auf alle innerhalb dieser Begrenzung liegenden Unendlichkeitspunkte bedeutet. Wenn die Begrenzung C so gewählt wird, dass sie durch keinen Unstetigkeitspunkt geht, so ist das obige Integral entweder Null, wenn die Function $F(u)$ ungerade ist, oder es hat einen bestimmten endlichen Wert, den wir mit M bezeichnen. Wird nun $F(u)$ im Punkte η_l unendlich von der Ordnung p, so erhält man das Residuum für diesen Punkt durch Entwickelung von $F(t+\eta_l)$ und

$$-\frac{1}{t+\eta_l-u} \text{ oder } \frac{1}{u-t-\eta_l}$$

nach Potenzen von t. Sind M_p bis M_1 die Coëfficienten der $(-p)^{\text{ten}}$ bis $(-1)^{\text{ten}}$ Potenz von t in der Reihe für $F(t+\eta_l)$, so ergiebt sich als Residuum für den Punkt η_l, d. h. als Coëfficient der $(-1)^{\text{ten}}$ Potenz in der Entwickelung von

$$\frac{F(t+\eta_l)}{u-t-\eta_l}:$$

$$R = \sum_1^p{}_h \frac{(-1)^h M_h}{(h-1)!}\left\{\frac{d^{h-1}}{du^{h-1}}\frac{1}{u-t-\eta}\right\}_{t=0}$$

oder

$$R = \sum_1^{p} {}_h \frac{M_h}{(u-\eta_l)^h};$$

so dass (1) übergeht in

$$F(u) = M + \sum_1^{p} {}_h \frac{M_h}{(u-\eta_l)^h}. \qquad (2)$$

Setzt man jetzt voraus, dass $F(u)$ eine doppelt-periodische Function ist mit den Eigenschaften $F(u+\omega) = \pm F(u)$ und $F(u+\omega') = \pm F(u)$ und wählt als Begrenzung ein Parallelogramm mit den Ecken:

$$\pm (s+\sigma)\omega \pm (r+\rho)\omega',$$

wo σ und ρ so beschaffen sein sollen, dass auf den Seiten des Parallelogramms die Function nicht unstetig wird, so ist für η_l zu setzen:

$$m\omega + n\omega' + \varepsilon,$$

wenn unter ε wieder der im Parallelogramm (ω, ω') liegende Unendlichkeitspunkt verstanden wird und für m alle ganzen Zahlen von $-s$ bis $+s$ und für n alle von $-r$ bis $+r$ gesetzt werden, so dass (2) übergeht in:

$$F(u) = M + \sum_{-s}^{+s} {}_m \sum_{-r}^{+r} {}_n \sum_1^{p} {}_h \frac{M_h}{(u-m\omega-n\omega'-\varepsilon)^h},$$

und lässt man nun die Zahlen s und r unendlich werden, so ist

$$F(u) = M + \sum_1^{p} {}_h M_h \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_m \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n \frac{1}{(u-m\omega-n\omega'-\varepsilon)^h}, \qquad (3)$$

d. h.:

> „Jede doppelt-periodische Function $F(u)$, welche die Gleichungen $F(u+\omega) = \pm F(u)$ und $F(u+\omega') = \pm F(u)$ erfüllt und in dem im Parallelogramm (ω, ω') liegenden Punkte ε von der Ordnung p unendlich wird, kann in der Form (3) dargestellt werden."

Die Constante M ist durch Anwendung auf einen speciellen Wert des Arguments zu bestimmen; in allen Fällen, in welchen die Function ungerade ist, oder durch Veränderung des Arguments in eine ungerade verwandelt werden kann, ist M gleich Null. Die Coëfficienten M_h unterscheiden sich von den Coëfficienten M_h in § 1, (1) — (4) nur

durch das Vorzeichen, da sie aus der Entwickelung der Function $F(u + m\omega + n\omega' + \varepsilon)$, die Coëfficienten M_k aber aus der Entwickelung von $F(u + \varepsilon)$ hervorgehen. Unterscheidet man, je nachdem $F(u)$ bei Veränderung von u um ω oder ω' in denselben oder den entgegengesetzten Wert übergeht, vier Fälle entsprechend jenen vier Sätzen, und bezeichnet die Coëfficienten danach mit oberen Indices, so ist:

$$\mathrm{M}^1{}_k = M^1{}_k\,, \qquad \mathrm{M}^3{}_k = (-1)^{m+n}\, M^3{}_k\,,$$
$$\mathrm{M}^2{}_k = (-1)^m\, M^2{}_k\,, \qquad \mathrm{M}^4{}_k = (-1)^n\, M^4{}_k\,.$$

Versteht man jetzt, wie früher, unter $f(\lambda, \mu, \nu)$ den reciproken Wert von

$$\sin^\lambda\varphi\, \cos^\mu\varphi\, \Delta^\nu\varphi,$$

so wird diese Function in den Punkten 0, $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega + \omega'}{2}$ und $\frac{\omega'}{2}$ von den bez. Ordnungen λ, μ, ν, ρ unendlich, und man erhält:

$$\begin{aligned} f(\lambda, \mu, \nu) = \mathrm{M} &+ \sum_1^\lambda{}_k\, \mathrm{A}_k \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{1}{(u - m\omega - n\omega')^k} \\ &+ \frac{(-1)^\mu}{\chi'^{\mu+\nu}} \sum_1^\mu{}_k\, \mathrm{B}_k \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{1}{\left(u - \frac{2m+1}{2}\omega - n\omega'\right)^k} \qquad (4) \\ &+ \frac{i^{\mu-\nu}\, \chi^{\lambda+\mu}}{\chi'^{\mu+\nu}} \sum_1^\nu{}_k\, \Gamma_k \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{1}{\left(u - \frac{2m+1}{2}\omega - \frac{2n+1}{2}\omega'\right)^k} \\ &+ i^{\mu+\nu}\, \chi^{\lambda+\mu} \sum_1^\rho{}_k\, \Delta_k \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{1}{\left(u - m\omega - \frac{2n+1}{2}\omega'\right)^k}. \end{aligned}$$

Je nachdem die Function $f(\lambda, \mu, \nu)$ einer der vier Gruppen angehört, stimmen die Coëfficienten A B Γ Δ mit den Coëfficienten A B C D des vorigen Paragraphen überein oder unterscheiden sich durch den Factor $(-1)^m$ oder $(-1)^{m+n}$ oder $(-1)^n$. Da die Functionen $f(\lambda, \mu, \nu)$, welche den letzten drei Gruppen angehören, entweder $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$ oder $\Delta\varphi$ in einer ungeraden Potenz enthalten, so ist nach einer oben gemachten Bemerkung für diese M gleich Null.

Die Function $\sin^2\mathrm{am}\, u$ ist gerade und kann durch Veränderung des Arguments nicht in eine ungerade verwandelt werden, M darf

deshalb nicht gleich Null gesetzt werden; nun ist $A_1 = 0$, $A_2 = \frac{1}{\varkappa^2}$ und da der im Parallelogramm (ω, ω') liegende Unstetigkeitspunkt $\varepsilon = \frac{\omega'}{2}$ ist, so ist:

$$\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, u = \varkappa^2 \mathrm{M} + \sum_{-\infty}^{+\infty m} \sum_{-\infty}^{+\infty n} \frac{1}{\left(u - m\omega - \frac{2n+1}{2}\omega'\right)^2}.$$

Setzt man $u = 0$, so findet man

$$\varkappa^2 \mathrm{M} = M = - \sum_{-\infty}^{+\infty m} \sum_{-\infty}^{+\infty n} \frac{1}{\left(m\omega + \frac{2n+1}{2}\omega'\right)^2}$$

und

$$\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am} u = \sum_{-\infty}^{+\infty m} \sum_{-\infty}^{+\infty n} \frac{1}{\left(u - m\omega - \frac{2n+1}{2}\omega'\right)^2} - \sum_{-\infty}^{+\infty m} \sum_{-\infty}^{+\infty n} \frac{1}{\left(m\omega + \frac{2n+1}{2}\omega'\right)^2}. \tag{5}$$

Setzt man in (4) $\lambda = n$, $\mu = \nu = 0$; $\lambda = -n$, $\mu = n$, $\nu = 0$, so erhält man folgende beiden Formeln:

$$\frac{1}{\sin^n \mathrm{am}\, u} = \mathrm{M} + \sum_{1}^{n k} \mathrm{A}_k \sum_{-\infty}^{+\infty m} \sum_{-\infty}^{+\infty n} \frac{1}{(u - m\omega - n\omega')^k}$$

und

$$\mathrm{tang}^n \mathrm{am}\, u = \mathrm{M} + \frac{(-1)^n}{\varkappa'^n} \sum_{1}^{n k} \mathrm{B}_k \sum_{-\infty}^{+\infty m} \sum_{-\infty}^{+\infty n} \frac{1}{\left(u - \frac{2m+1}{2}\omega - n\omega'\right)^k}.$$

Beachtet man nun, dass für $\omega' = i\infty : \varkappa = 0$, $\varkappa' = 1$ und $q = 0$ wird und $\sin \mathrm{am} u$ und $\cos \mathrm{am} u$ in $\sin x$ und $\cos x$ übergeht, ω aber $= \pi$ ist, so geben die beiden letzten Formeln Partialbruchentwickelungen für $\mathrm{cosec}\, x$, $\sec x$, $\mathrm{tang}\, x$ und $\mathrm{cotg}\, x$:

$$\mathrm{cosec}^n x = \mathrm{M} + \sum_{1}^{n k} \mathrm{A}_k \sum_{-\infty}^{+\infty m} \frac{1}{(x - m\pi)^k}, \tag{6}$$

$$\mathrm{tang}^n x = \mathrm{M} + (-1)^n \sum_{1}^{n k} \mathrm{B}_k \sum_{-\infty}^{+\infty m} \frac{1}{\left(x - \frac{2m+1}{2}\pi\right)^k}. \tag{7}$$

Ist n ungerade, so ist M in beiden Formeln gleich Null; da $A_k = (-1)^m A_k$ und $B_k = B_k$, so ist:

$$\operatorname{cosec}^{2n+1} x = \sum_{0}^{n} {}^{k} A_{2k+1} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{m} \frac{(-1)^m}{(x - m\pi)^{2k+1}}, \tag{8}$$

$$\operatorname{tang}^{2n+1} x = -\sum_{0}^{n} {}^{k} B_{2k+1} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{m} \frac{1}{\left(x - \frac{2m+1}{2}\pi\right)^{2k+1}}. \tag{9}$$

Ist dagegen n gerade, so kann M einen endlichen, von Null verschiedenen Wert haben; $A_k = A_k$ und $B_k = B_k$:

$$\operatorname{cosec}^{2n} x = \mathrm{M} + \sum_{1}^{n} {}^{k} A_{2k} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{m} \frac{1}{(x - m\pi)^{2k}}, \tag{10}$$

$$\operatorname{tang}^{2n} x = \mathrm{M} + \sum_{1}^{n} {}^{k} B_{2k} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{m} \frac{1}{\left(x - \frac{2m+1}{2}\pi\right)^{2k}}. \tag{11}$$

Indem man $x + \frac{\pi}{2}$ für x setzt, erhält man die Reihen für sec x und cotg x. Die Coëfficienten A_k, B_k berechnet man entweder aus (12) § 1, nachdem man z und c durch $x : \sin x$ und $\cos x$ ersetzt und Δ gleich der Einheit gemacht hat, oder man setzt in den für die entsprechenden elliptischen Functionen erhaltenen Coëfficienten $\varkappa = 0$.

§ 3.

Von diesen Doppelsummen ist es leicht, zu einfachen Summen überzugehen, welche nach trigonometrischen Functionen mit Argumenten von der Form:

$$x \quad mi\lg q \quad \text{oder} \quad x - mi\lg q'$$

fortschreiten. Setzt man in der Gleichung (3) des vorigen Paragraphen $u = \frac{\omega x}{\pi}$ und multiplicirt mit $\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^p$, so ist:

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^p F(u) = M + \sum_{1}^{p} {}^{k} \mathrm{M}_k \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{m} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{n} \frac{1}{\left(x - m\pi + ni\lg q - \frac{\varepsilon\pi}{\omega}\right)^k}. \tag{1}$$

Unterscheidet man dann die beiden Fälle:

$$F(u + \omega) = F(u)$$

und

$$F(u + \omega) = -F(u),$$

so kann man im ersteren die Reihen:

$$\operatorname{cotg} z = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{m} \frac{1}{z - m\pi}$$

und

$$\frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!}\frac{d^{h-1}}{dz^{h-1}}\operatorname{cotg} z = \sum_{-\infty}^{+\infty m}\frac{1}{(z-m\pi)^h}$$

anwenden; man setzt $z = x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega} + ni\lg q$ und die so erhaltenen Summen in (1) ein; dann ist

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^p F(u) = M + \tag{2}$$

$$+ \sum_1^p{}^h M_h \sum_{-r}^{+s n}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{p-h}\frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!}\frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}}\operatorname{cotg}\left(x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega} + ni\lg q\right),$$

wenn man für M_h wieder M_h schreibt. Im zweiten Falle hat man M_h durch $(-1)^m M_h$ zu ersetzen, an Stelle der Gleichung (1) tritt also:

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^p F(u) = M + \sum_1^p{}^h M_h \sum_{-\infty}^{+\infty m}\sum_{-\infty}^{+\infty n}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{p-h}\frac{(-1)^m}{\left(x - m\pi + ni\lg q - \frac{\varepsilon\pi}{\omega}\right)^h}. \tag{3}$$

Wendet man hier die Reihen:

$$\operatorname{cosec} z = \sum_{-\infty}^{+\infty m}\frac{(-1)^m}{z - m\pi}$$

und

$$\frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!}\frac{d^{h-1}}{dz^{h-1}}\operatorname{cosec} z = \sum_{-\infty}^{+\infty m}\frac{(-1)^m}{(z-m\pi)^h}$$

an, setzt darin $z = x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega} + ni\lg q$ und die dadurch entstehenden Summen in (3) ein, so ergiebt sich:

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^p F(u) = M + \tag{4}$$

$$+ \sum_1^p{}^h M_h \sum_{-\infty}^{+\infty n}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{p-h}\frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!}\frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}}\operatorname{cosec}\left(x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega} + ni\lg q\right).$$

Dabei war es gleichgiltig für die Form der Entwickelung, ob $F(u + \omega') = F(u)$ oder $= -F(u)$ ist; nur wäre im zweiten Falle M_h nicht durch M_h bez. $(-1)^m M_h$, sondern durch $(-1)^n M_h$ bez. $(-1)^{m+n} M_h$ zu ersetzen gewesen, so dass an Stelle der Gleichungen (2) und (4) folgende treten:

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^p F(u) = M + \tag{5}$$

$$+ \sum_1^p{}_h M_h \sum_r^{+s}{}_n \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{p-h} \frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!} \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} (-1)^n \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega} + ni\lg q\right)$$

und

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^p F(u) = M + \tag{6}$$

$$+ \sum_1^p{}_h M_h \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{p-h} \frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!} \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} (-1)^n \operatorname{cosec}\left(x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega} + ni\lg q\right).$$

Danach können wir folgende Sätze aussprechen:

„Jede doppelt-periodische Function $F\left(\frac{\omega x}{\pi}\right) = F(u)$ mit der reellen Periode ω, welche im Punkte ε von der Ordnung p unendlich wird, ist linear darstellbar durch die Summe

$$\sum_{-r}^{+s}{}_n \operatorname{cotang}\left(x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega} + ni\lg q\right)$$

und ihre Ableitungen,[1]) wenn $F(u + \omega') = + F(u)$ ist, und durch die Summe

$$\sum_{-r}^{+s}{}_n (-1)^n \operatorname{cotang}\left(x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega} + ni\lg q\right)$$

und ihre Ableitungen, wenn $F(u + \omega') = - F(u)$ ist."

„Jede doppelt-periodische Function $F\left(\frac{\omega x}{\pi}\right) = F(u)$ mit der reellen Periode 2ω, für welche $F(u + \omega) = - F(u)$ und der Punkt ε ein Unendlichkeitspunkt $p$ter Ordnung ist, ist linear darstellbar durch die Summe

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \operatorname{cosec}\left(x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega} + ni\lg q\right)$$

und ihre Ableitungen,[1]) wenn $F(u + \omega') = + F(u)$ ist, und durch die Summe

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{cosec}\left(x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega} + ni\lg q\right)$$

und ihre Ableitungen, wenn $F(u + \omega') = - F(u)$ ist."

---

[1]) Beide Sätze finden sich auf andere Weise abgeleitet: Briot et Bouquet, Fonct. elliptiques, p. 291 und p. 288.

Dies auf unsre Functionen $f(\lambda, \mu, \nu)$ angewendet gibt zunächst für die erste Gruppe:

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\rho} f_1(\lambda, \mu, \nu) = M +$$

$$+ \sum_{1}^{\lambda} {}_h \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\rho-h} \frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!} A_h \sum_{-r}^{+s} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{cotg}(x + ni \lg q)$$

$$- \sum_{1}^{\mu} {}_h \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\rho-h} \frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!} B_h \sum_{-r}^{+s} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{tang}(x + ni \lg q)$$

$$- \sum_{1}^{\nu} {}_h \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\rho-h} \frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!} C_h \sum_{-r}^{+s} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{tang}\left(x + \tfrac{2n+1}{2} i \lg q\right)$$

$$+ \sum_{1}^{\rho} {}_h \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\rho-h} \frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!} D_h \sum_{-r}^{+s} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{cotg}\left(x + \tfrac{2n+1}{2} i \lg q\right);$$

für ρ ist die grösste der Zahlen λ, μ, ν, ρ zu setzen. Führt man die Bezeichnung ein:

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\rho-h} \frac{(-1)^{h-1} A_h}{(h-1)!} = \mathrm{A}_h ,$$

$$\frac{(-1)^{\mu}}{\chi'^{\mu+\nu}} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\rho-h} \frac{(-1)^{h-1} B_h}{(h-1)!} = \mathrm{B}_h ,$$

$$\frac{i^{\mu-\nu} \chi^{\lambda+\mu}}{\chi'^{\mu+\nu}} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\rho-h} \frac{(-1)^{h-1} C_h}{(h-1)!} = \Gamma_h , \qquad (7)$$

$$i^{\mu+\nu} \chi^{\lambda+\mu} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\rho-h} \frac{(-1)^{h-1} D_h}{(h-1)!} = \Delta_h ,$$

so geht die letzte Gleichung in folgende über:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\rho} f_1(\lambda, \mu, \nu) = M &+ \sum_1^{\lambda} {}_h A_h \sum_{-r}^{+s} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{cotg}\,(x + ni\lg q) \\
&- \sum_1^{\mu} {}_h B_h \sum_{-r}^{+s} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{tang}\,(x + ni\lg q) \\
&- \sum_1^{\nu} {}_h \Gamma_h \sum_{-r}^{+s} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{tang}\left(x + \tfrac{2n+1}{2} ni\lg q\right) \\
&- \sum_1^{\rho} {}_h \Delta_h \sum_{-r}^{+s} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{cotg}\,\left(x + \tfrac{2n+1}{2} ni\lg q\right).
\end{aligned} \tag{8}
$$

Aus (4) folgt für die zweite Gruppe, da, wie erwähnt, M hier Null ist:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\rho} f_2(\lambda, \mu, \nu) &= \sum_1^{\lambda} {}_h A_h \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{cosec}\,(x + ni\lg q) \\
&- \sum_1^{\mu} {}_h B_h \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \sec\,(x + ni\lg q) \\
&- \sum_1^{\nu} {}_h \Gamma_h \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \sec\left(x + \tfrac{2n+1}{2} i\lg q\right) \\
&+ \sum_1^{\rho} {}_h \Delta_h \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{cosec}\left(x + \tfrac{2n+1}{2} i\lg q\right).
\end{aligned} \tag{9}
$$

Die Coëfficienten A B Γ Δ in (9) sind von den gleichnamigen in (8) nicht der Form nach verschieden, sondern nur dadurch, dass die Zahlen λ, μ, ν, ρ nicht mehr sämmtlich gerade oder ungerade sind, sondern andre Werte haben, wie im § 1 angegeben ist. Die Entwickelung für $\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\rho} f_3(\lambda, \mu, \nu)$ unterscheidet sich der Form nach von der für $\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\rho} f_2(\lambda, \mu, \nu)$ dadurch, dass in allen Summen sec bez. cosec mit $(-1)^n$ zu multipliciren ist. Derselbe Unterschied besteht zwischen der Entwickelung der ersten und letzten Gruppe, so dass man in (8) unter dem zweiten Summenzeichen nur mit $(-1)^n$ zu multipliciren und sowol für die Grenzen der endlichen Summen, als auch in den Coëfficienten die Werte von λ, μ, ν, ρ einzusetzen hat, um die Entwickelung von $\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\rho} f_4(\lambda, \mu, \nu)$ zu erhalten. Was in § 1 über das

Verschwinden der Coëfficienten A, B, C, D gesagt ist, gilt hier ebenso von den Λ, B, Γ, Δ, so dass immer nur entweder sämmtliche Coëfficienten mit ungeraden Indices oder mit geraden in einer Summe vorkommen, je nachdem die zugehörige Zahl λ, μ, ν oder ρ ungerade oder gerade ist.

An die in den Gleichungen (2) und (4) — (6) enthaltenen Sätze schliessen sich noch zwei andre. Gehen wir wieder von § 2, (3) aus und setzen darin $u = \frac{\omega' x}{\pi}$, so ergiebt sich nach Multiplication mit $\left(\frac{\omega'}{\pi}\right)^p$:

$$\left(\frac{\omega'}{\pi}\right)^p F(u) =$$

$$= M + \sum_1^p{}_h \; \mathrm{M}_h \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \left(\frac{\omega'}{\pi}\right)^{p-h} \frac{1}{\left(x - m\frac{\omega\pi}{\omega'} - n\pi - \frac{\varepsilon\pi}{\omega'}\right)^h};$$

bezeichnet man mit Jacobi $-i\pi\frac{\omega}{\omega'}$ mit $\lg q'$, so ist:

$$\left(\frac{\omega'}{\pi}\right)^p F(u) =$$

$$= \sum_1^p{}_h \; \mathrm{M}_h \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \left(\frac{\omega'}{\pi}\right)^{p-h} \frac{1}{\left(x - n\pi - mi\lg q' - \frac{\varepsilon\pi}{\omega}\right)^h};$$

Benutzt man wieder die Reihen für cotg z und cosec z und ihre Ableitungen, so gelangt man, indem man die beiden Fälle

$$F(u + \omega') = F(u)$$

und

$$F(u + \omega') = -F(u)$$

unterscheidet und danach $\mathrm{M}_h = M_h$ oder $\mathrm{M}_h = (-1)^n M_h$ setzt, in ähnlicher Weise wie früher, zu folgenden beiden Entwickelungen, die den Ausdrücken (2) und (4) entsprechen:

$$\left(\frac{\omega'}{\pi}\right)^p F(u) = \tag{10}$$

$$= M + \sum_1^p M_h \sum_{-s}^{+s}{}_m \left(\frac{\omega'}{\pi}\right)^{p-h} \frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!} \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega'} - mi\lg q'\right)$$

und

$$\left(\frac{\omega'}{\pi}\right)^p F(u) = M + \sum_1^p{}_h \; M_h \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \left(\frac{\omega'}{\pi}\right)^{p-h} \frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!}$$
$$\times \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{cosec}\left(x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega'} - mi\lg q'\right). \qquad (11)$$

Diese beiden Formeln sind richtig, wenn $F(u + \omega) = F(u)$ ist; im Falle $F(u + \omega) = -F(u)$ hätten wir $M_h = (-1)^m M_h$ bez. $M_h = (-1)^{m+n} M_h$ setzen müssen:

$$\left(\frac{\omega'}{\pi}\right)^p F(u) = M + \sum_1^p{}_h \; M_h \sum_{-r}^{+s}{}_m \left(\frac{\omega'}{\pi}\right)^{p-h} \frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!}$$
$$\times \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} (-1)^m \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega'} - mi\lg q'\right), \qquad (12)$$

$$\left(\frac{\omega'}{\pi}\right)^p F(u) = M + \sum_1^p{}_h \; M_h \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \left(\frac{\omega'}{\pi}\right)^{p-h} \frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!}$$
$$\times \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} (-1)^m \operatorname{cosec}\left(x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega'} - mi\lg q'\right). \qquad (13)$$

Daraus folgen die Sätze:

„Jede doppelt-periodische Function $F\left(\frac{\omega' x}{\pi}\right) = F(u)$ mit der imaginären Periode ω' und dem Unendlichkeitspunkt $p$ter Ordnung ε ist eine lineare Function von

$$\sum_{-r}^{+s}{}_m \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega'} - mi\lg q'\right)$$

oder

$$\sum_{-r}^{+s}{}_m (-1)^m \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega'} - mi\lg q'\right)$$

und den Ableitungen dieser Summen, je nachdem $F(u + \omega) = F(u)$ oder $= -F(u)$ ist."

„Jede doppelt-periodische Function $F\left(\frac{\omega' x}{\pi}\right) = F(u)$ mit der imaginären Periode $2\omega'$, für welche $F(u + \omega') = -F(u)$ und ε ein Unendlichkeitspunkt $p$ter Ordnung ist, ist eine lineare Function von

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \operatorname{cosec}\left(x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega'} - mi\lg q'\right)$$

oder

$$\sum_{-\infty}^{+\infty m} (-1)^m \operatorname{cosec}\left(x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega'} - mi \lg q'\right)$$

und den Ableitungen dieser Summen, je nachdem $F(u + \omega) = F(u)$ oder $= -F(u)$ ist."

Daraus erhält man den Gleichungen (8) und (9) entsprechend folgendes:

$$\left(\frac{\omega'}{\pi}\right)^{\rho} f_1(\lambda, \mu, \nu) = M + \sum_{1}^{\lambda h} A'_h \sum_{-r}^{+s m} \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{cotg}(x - mi \lg q') \cdot$$

$$+ \sum_{1}^{\mu h} B'_h \sum_{-r}^{+s m} \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{cotg}\left(x - \frac{2m+1}{2} i \lg q'\right)$$

(14)

$$- \sum_{1}^{\nu h} \Gamma'_h \sum_{-r}^{+s m} \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{tang}\left(x - \frac{2m+1}{2} i \lg q'\right)$$

$$- \sum_{1}^{\rho h} \Delta'_h \sum_{-r}^{+s m} \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{tang}(x - mi \lg q'),$$

$$\left(\frac{\omega'}{\pi}\right)^{\rho} f_2(\lambda, \mu, \nu) = \sum_{1}^{\lambda h} A'_h \sum_{-r}^{+s m} \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} (-1)^m \operatorname{cotg}(x - mi \lg q')$$

$$+ \sum_{1}^{\mu h} B'_h \sum_{-r}^{+s m} \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} (-1)^m \operatorname{cotg}\left(x - \frac{2m+1}{2} i \lg q'\right)$$

(15)

$$- \sum_{1}^{\nu h} \Gamma'_h \sum_{-r}^{+s m} \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} (-1)^m \operatorname{tang}\left(x - \frac{2m+1}{2} i \lg q'\right)$$

$$- \sum_{1}^{\rho h} \Delta'_h \sum_{-r}^{+s m} \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} (-1)^m \operatorname{tang}(x - mi \lg q');$$

ρ bedeutet wiederum die grösste der Zahlen λ, μ, ν, ρ und die Coëfficienten Δ', B', Γ', Δ' unterscheiden sich von den nicht gestrichenen dadurch, dass ω' an die Stelle von ω tritt. Für die dritte Gruppe ergiebt sich:

$$\left(\frac{\omega'}{\pi}\right)^{\lambda} f_3(\lambda,\mu,\nu) = \sum_1^{\lambda} {}^{h}\ A'_h \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{m} \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} (-1)^m \operatorname{cosec}\,(x - mi\lg q')$$

$$+ \sum_1^{\mu} {}^{h}\ B'_h \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{m} \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} (-1)^m \operatorname{cosec}\left(x - \tfrac{2m+1}{2} i\lg q'\right)$$

(16)

$$- \sum_1^{\nu} {}^{h}\ \Gamma'_h \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{m} \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} (-1)^m \sec\left(x - \tfrac{2m+1}{2} i\lg q'\right)$$

$$- \sum_1^{\rho} {}^{h}\ \Delta'_h \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{m} \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} (-1)^m \sec\,(x - mi\lg q').$$

Die Reihen für die letzte Gruppe $\left(\frac{\omega'}{\pi}\right)^{\rho} f_4(\lambda, \mu, \nu)$ erhält man, indem man in (16) den Factor $(-1)^m$ unterdrückt.

Setzt man in den Reihen für f_2, f_3, f_4 bez. $\lambda, \mu, \nu = -1$ und die beiden andern Zahlen jedesmal gleich Null, so erhält man die bekannten Reihen für $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta\varphi$, welche entweder die Vielfachen von $\frac{i}{2} lg\, q$ oder von $\frac{i}{2} \lg q'$ enthalten. Aus (8) ergiebt sich für $\lambda = -2$, $\mu = \nu = 0$:

$$\left(\frac{\omega\varkappa}{\pi}\right)^2 \sin^2\varphi = M \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{n} \frac{d}{dx} \operatorname{cotg}\left(x + \tfrac{2n+1}{2} i \lg q\right)$$

oder

$$\left(\frac{\omega\varkappa}{\pi}\right)^2 \sin^2 \operatorname{am}\frac{\omega x}{\pi} = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{cosec}^2\left(\tfrac{2n+1}{2} i \lg q\right)$$

$$+ \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{n} \operatorname{cosec}^2\left(x + \tfrac{2n+1}{2} i \lg q\right).$$

Man sieht aber leicht, dass

$$-\sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{n} \operatorname{cosec}^2\left(\tfrac{2n+1}{2} i \lg q\right) = 8 \sum_1^{\infty} \frac{m q^m}{1-q^{2m}}$$

ist, so dass: (17)

$$\left(\frac{\omega\varkappa}{\pi}\right)^2 \sin^2 \operatorname{am}\frac{\omega x}{\pi} = 8 \sum_1^{\infty} \frac{m q^m}{1-q^{2m}} + \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{n} \operatorname{cosec}^2\left(x + \tfrac{2n+1}{2} i \lg q\right).$$

Schreibt man in der Gleichung

$$\left(\frac{\omega\varkappa}{\pi}\right)^2 \sin^2 \mathrm{am}\frac{\omega x}{\pi} = M - \sum_{-\infty}^{+\infty n} \frac{d}{dx} \operatorname{cotg}\left(x - \tfrac{2n+1}{2} i \lg q\right)$$

für $x : x + \frac{\omega'}{2}\frac{\pi}{\omega} + \frac{\varepsilon\pi}{\omega}$, wo ε ein Unendlichkeitspunkt der früher betrachteten Function $F_1(u)$ ist, für welche $F_1(u + \omega) = F_1(u + \omega') = F_1(u)$ war, so geht sie über in:

$$\left(\frac{\omega\varkappa}{\pi}\right)^2 \sin^2 \mathrm{am}\left(\frac{\omega x}{\pi} + \frac{\omega'}{2} - \varepsilon\right) =$$

$$M - \sum_{-\infty}^{+\infty n} \frac{d}{dx} \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega} + ni \lg q\right),$$

und führt man für die Summe nach n in (2 § 3 $\sin^2 \mathrm{am}\left(\frac{\omega x}{\pi} + \frac{\omega'}{2} - \varepsilon\right)$ ein, so kann in dieser Gleichung, wenn M_1 von Null verschieden ist, das Integral von $\sin^2 \mathrm{am}\left(\frac{\omega x}{\pi} + \frac{\omega'}{2} - \varepsilon\right)$ auftreten und man hat den Satz, dass jede doppelt-periodische Function mit den Perioden ω und ω' als lineare Function von $\sin^2 \mathrm{am}\left(\frac{\omega x}{\pi} + \frac{\omega'}{2} - \varepsilon\right)$, dessen erstem Integral und dessen Differentialquotienten dargestellt werden kann, welchen Satz wir am Anfang des § 1 als auf andre Weise abgeleitet vorausgesetzt haben. Indem man ebenso

$$\sin \mathrm{am}\left(\frac{\omega\varkappa}{\pi} + \frac{\omega'}{2} - \varepsilon\right) \text{ für } \sum_{-\infty}^{+\infty n} \operatorname{cosec}\left(x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega} + ni \lg q\right) \text{ in (4)}$$

$$\cos \mathrm{am}\left(\frac{\omega x}{\pi} + \frac{\omega'}{2} - \varepsilon\right) \text{ für } \sum_{-\infty}^{+\infty n} (-1)^n \operatorname{cosec}\left(x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega} + ni \lg q\right)$$

$$\Delta \mathrm{am}\left(\frac{\omega x}{\pi} + \frac{\omega'}{2} - \varepsilon\right) \text{ für } \sum_{-r}^{+s n} (-1)^n \operatorname{cotang}\left(x - \frac{\varepsilon\pi}{\omega} + ni \lg q\right)$$

in (6) und (5) einführt, erhält man die drei andern im § 1 vorausgesetzten Sätze über doppelt-periodische Functionen.

§ 4.

Was die Convergenz der in den §§ 2 und 3 angegebenen Reihen anbelangt, so ist dieselbe für die Doppelsummen in § 2 leicht einzusehen. Von den in § 3 enthaltenen Reihen convergiren diejenigen, welche die Functionen sec und cosec enthalten, weil diese sowol selbst, als auch ihre Differentialquotienten für unendlich grosse imaginäre Argumente gleich Null werden. Die Functionen tang $(x + ni \lg q)$ und cotang $(x + ni \lg q)$ aber convergiren gegen $\pm i$ und nur ihre Ableitungen nehmen ins Unendliche ab. Die diese Functionen enthaltenden Reihen convergiren somit nicht, was im § 3 dadurch angedeutet ist, dass als Grenzen der Summen die endlichen Grössen s und $-r$ gewählt sind. Wir bringen nun diese Reihen auf eine andre Form, in welcher sie unbedingt convergiren, beschränken uns dabei aber auf die den Modul q enthaltenden. Wie früher bemerkt wurde, können in den Entwickelungen der Function $f(\lambda, \mu, \nu)$ nicht gleichzeitig alle vier Summen auftreten, weil eine der Zahlen λ, μ, ν, ρ notwendig 0 oder negativ sein muss, und man kann es durch Veränderung des Arguments leicht erreichen, dass in $f(\lambda, \mu, \nu)$ sin am u nur in einer positiven Potenz vorkommt, also $\lambda \gtreqless 0$ ist. Ist diese Aenderung geschehen, so haben wir es nur noch mit den drei letzten Summen zu tun, deren obere Grenzen μ, ν, ρ sind. Fügen wir nun zur rechten Seite der Gleichung (8) § 3 den constanten Ausdruck:

$$Q = B_1 \sum_{-r}^{+s} {}^{n} \operatorname{tang}(ni \lg q) + \Gamma_1 \sum_{r}^{+s} {}^{n} \operatorname{tang}\left(\tfrac{2n+1}{2} i \lg q\right) - \Delta_1 \sum_{-r}^{+s} {}^{n} \operatorname{cotg}\left(\tfrac{2n+1}{2} i \lg q\right) \tag{1}$$

oder, da wir der Symmetrie wegen auch diejenigen Summen umformen wollen, für welche $h > 1$ ist,

$$Q = \sum_{1}^{\mu} {}^{h} B_h \sum_{-r}^{+s} {}^{n} \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{tang}(ni \lg q) + + \sum_{1}^{\nu} {}^{h} \Gamma_h \sum_{-r}^{+s} {}^{n} \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{tang}\left(\tfrac{2n+1}{2} i \lg q\right) - \sum_{1}^{\rho} {}^{h} \Delta_h \sum_{-r}^{+s} {}^{n} \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{cotg}\left(\tfrac{2n+1}{2} i \lg q\right) \tag{2}$$

und bezeichnen die neue Constante mit P, so geht jene Gleichung über in:

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\beta} f_1(\lambda, \mu, \nu) = P - \sum_1^{\mu} {}_h \; B_h \sum_{-r}^{+s} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{\sin x}{\cos ni \lg q \,.\, \cos(x + ni \lg q)}$$

$$- \sum_1^{\nu} {}_h \; \Gamma_h \sum_{-r}^{+s} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{\sin x}{\cos^{\frac{2n+1}{2}} i \lg q \,.\, \cos\left(x - \frac{2n+1}{2} i \lg q\right)} \tag{3}$$

$$- \sum_1^{\rho} {}_h \; \Delta_h \sum_{-r}^{+s} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{\sin x}{\sin \frac{2n+1}{2} i \lg q \,.\, \sin\left(x - \frac{2n+1}{2} i \lg q\right)}.$$

In dieser Reihe convergirt das allgemeine Glied mit wachsendem n gegen Null. Fasst man daher je zwei entsprechende Glieder zusammen, so ergiebt sich nach bekannten Umformungen:

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\beta} f_1(\lambda, \mu, \nu) = P - \sum_1^{\mu} {}_h \; B_h \left\{ \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{tang} x \right.$$

$$\left. - 2 \sum_1^{\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \cos 2ni \lg q} \right\}$$

$$- 2 \sum_1^{\nu} {}_h \; \Gamma_h \sum_0^{\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \cos^{\frac{2n+1}{2}} i \lg q} \tag{4}$$

$$- 2 \sum_1^{\rho} {}_h \; \Delta_h \sum_0^{\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \cos^{\frac{2n+1}{2}} i \lg q}$$

und endlich:

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\beta} f_1(\lambda, \mu, \nu) = P - \sum_1^{\mu} {}_h \; B_h \left\{ \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{tang} x \right.$$

$$\left. - 4 \sum_1^{\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{\sin 2x \; q^{2n}}{1 + 2 q^{2n} \cos 2x + q^{4n}} \right\}$$

$$- 4 \sum_1^{\nu} {}_h \; \Gamma_h \sum_0^{\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{\sin 2x \; q^{2n+1}}{1 + 2 q^{2n+1} \cos 2x + q^{4n+2}} \tag{5}$$

$$+ 4 \sum_1^{\rho} {}_h \; \Delta_h \sum_0^{\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{\sin 2x \; q^{2n+1}}{1 - 2 q^{2n+1} \cos 2x + q^{4n+2}},$$

welche Reihen unbedingt convergiren. Für die Function $f_4(\lambda, \mu, \nu)$ setzen wir ebenfalls voraus, dass $\lambda < 0$ gemacht worden ist, addiren hier $(-1)^n Q$, wo Q die vorige Bedeutung hat, und gelangen so zu einer Entwickelung, die sich von der in (3) für f_1 gegebenen nur dadurch unterscheidet, dass die einzelnen Glieder mit dem Factor $(-1)^n$ versehen sind; durch weitere Umformungen gelangt man dann zu den Gleichungen:

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\phi} f_4(\lambda,\mu,\nu) = R \quad \sum_1^{\mu} {}_h \; B_h \left\{ \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{tang} x \right.$$

$$\left. - 2 \sum_1^{\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{(-1)^n \sin 2x}{\cos 2x + \cos 2ni \lg q} \right\}$$

$$(6) \qquad - 4 \sum_1^{\nu} {}_h \; \Gamma_h \sum_0^{\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{(-1)^n \sin^2 x . \operatorname{tang}^{\frac{2n+1}{2}} i \lg q}{\cos 2x + \cos (2n+1) i \lg q}$$

$$+ 4 \sum_1^{\rho} {}_h \; \Delta_h \sum_0^{\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{(-1)^n \sin^2 x . \operatorname{cotg}^{\frac{2n+1}{2}} i \lg q}{\cos 2x - \cos (2n+1) i \lg q}$$

und

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\phi} f_4(\lambda,\mu,\nu) = R - \sum_1^{\mu} {}_h \; B_h \left\{ \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \operatorname{tang} x \right.$$

$$\left. - 4 \sum_1^{\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{(-1)^n \sin 2x \; q^{2n}}{1 + 2 q^{2n} \cos 2x + q^{4n}} \right\}$$

$$(7) \qquad + 8i \sum_1^{\nu} {}_h \; \Gamma_h \sum_0^{\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{(-1)^n \sin^2 x \; q^{2n+1} \frac{1-q^{2n+1}}{1+q^{2n+1}}}{1 + 2 q^{2n+1} \cos 2x + q^{4n+2}}$$

$$- 8i \sum_1^{\rho} {}_h \; \Delta_h \sum_0^{\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{(-1)^n \sin^2 x \; q^{2n+1} \frac{1+q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}}{1 - 2 q^{2n+1} \cos 2x + q^{4n+2}}.$$

Auch die Entwickelungen von f_2 und f_3 kann man in ähnlicher Weise darstellen; man erhält:

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\phi} f_2(\lambda,\mu,\nu) =$$

$$\sum_1^{\lambda} {}_h \; A_h \left\{ \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{1}{\sin x} + 4 \sum_1^{\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{\sin x \; q^n \; (1+q^{2n})}{1 - 2 q^{2n} \cos 2x + q^{4n}} \right\}$$

$$- \sum_1^{\mu} {}_h \; B_h \left\{ \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{1}{\cos x} + 4 \sum_1^{\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{\cos x \; q^n \; (1+q^{2n})}{1 + 2 q^{2n} \cos 2x + q^{4n}} \right\}$$

$$- 4 \sum_1^{\nu} {}_h \; \Gamma_h \sum_0^{\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{\cos x \; q^{n+1/2} \; (1+q^{2n+1})}{1 + 2 q^{2n+1} \cos 2x + q^{4n+2}} \qquad (8)$$

$$+ 4 \sum_1^{\rho} {}_h \; \Delta_h \sum_0^{\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{\sin x \; q^{n+1/2} \; (1+q^{2n+1})}{1 - 2 q^{2n+1} \cos 2x + q^{4n+2}}$$

und

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\rho} f_3(\lambda,\mu,\nu) =$$

$$\sum_1^{\lambda} {}_h \, A_h \left\{ \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{1}{\sin x} + 4 \sum_1^{\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{(-1)^n \sin x \, q^n \, (1+q^{2n})}{1-2\, q^{2n} \cos 2x + q^{4n}} \right\}$$

$$- \sum_1^{\mu} {}_h \, B_h \left\{ \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{1}{\cos x} + 4 \sum_1^{\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{(-1)^n \cos x \, q^n \, (1+q^{2n})}{1+2q^{2n} \cos 2x + q^{4n}} \right\}$$

$$+ 4\, i \sum_1^{\nu} {}_h \, \Gamma_h \sum_0^{\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{(-1)^n \sin x \, q^{n+1/2} \, (1-q^{2n+1})}{1+2\, q^{2n+1} \cos 2x + q^{4n+2}} \qquad (9)$$

$$+ 4\, i \sum_1^{\rho} {}_h \, \Delta_h \sum_0^{\infty} {}_n \frac{d^{h-1}}{dx^{h-1}} \frac{(-1)^n \cos x \, q^{n+1/2} \, (1-q^{2n+1})}{1-2\, q^{2n+1} \cos 2\, x + q^{4n+2}} .$$

Setzt man in (7) $\lambda = \mu = 0$, $\nu = -1$, in (8) $\mu = \nu = 0$, $\lambda = -1$, und in (9) $\lambda = \nu = 0$, $\mu = -1$, so erhält man die bekannten Reihen für die einfachen elliptischen Functionen.

Lebenslauf.

Ich, Paul Baumert, ev. Confession, wurde am 21. October 1853 zu Lauban in Schlesien geboren und erhielt meine Schulbildung auf dem Gymnasium daselbst. Michaelis 1873 bezog ich mit dem Zeugnisse der Reife die hiesige Universität und hörte die Vorlesungen der Herren: Bachmann, Cohn, Dilthey, Dorn, Galle, Grube, Krause, Loewig, Meyer, Poleck, Roemer, Rosanes, Schroeter. Drei Semester nahm ich an den Uebungen des von den Herren Professoren Schroeter und Meyer geleiteten mathematisch-physikalischen Seminars, drei an den mathematischen Uebungen des Herrn Prof. Rosanes Teil und je ein Semester an den von den Herrn Professoren Meyer und Dorn geleiteten Uebungen im physikalischen Cabinet und an den philosophischen Uebungen des Herrn Prof. Dilthey. Seit Ostern 1878 bin ich Amanuensis in dem unter Leitung des Herrn Prof. Dorn stehenden physikalischen Cabinet.

Allen genannten Herren, insbesondere den Herrn Professoren Schroeter, Rosanes, Meyer, Dorn fühle ich mich zum grössten Danke verpflichtet.

Thesen.

1. Die neuere mathematische Raumtheorie lässt zwar psychologische, nicht aber erkenntnistheoretische Folgerungen zu Gunsten des Empirismus zu.
2. Die in neuerer Zeit vielfach aufgestellte Behauptung, dass die Mathematik eine Naturwissenschaft sei, erkenne ich nicht an.
3. Bei der Darstellung zusammengesetzter elliptischer Functionen durch die einfachen ist die in vorstehender Arbeit zur Bestimmung der Coëfficienten angewandte Methode der auf Recursionsformeln beruhenden vorzuziehen.
4. Es ist wünschenswert, dass die Schüler der Gymnasien mit den in der Differential- und Integral-Rechnung neu auftretenden Begriffen und Gedankenreihen bekannt gemacht werden.